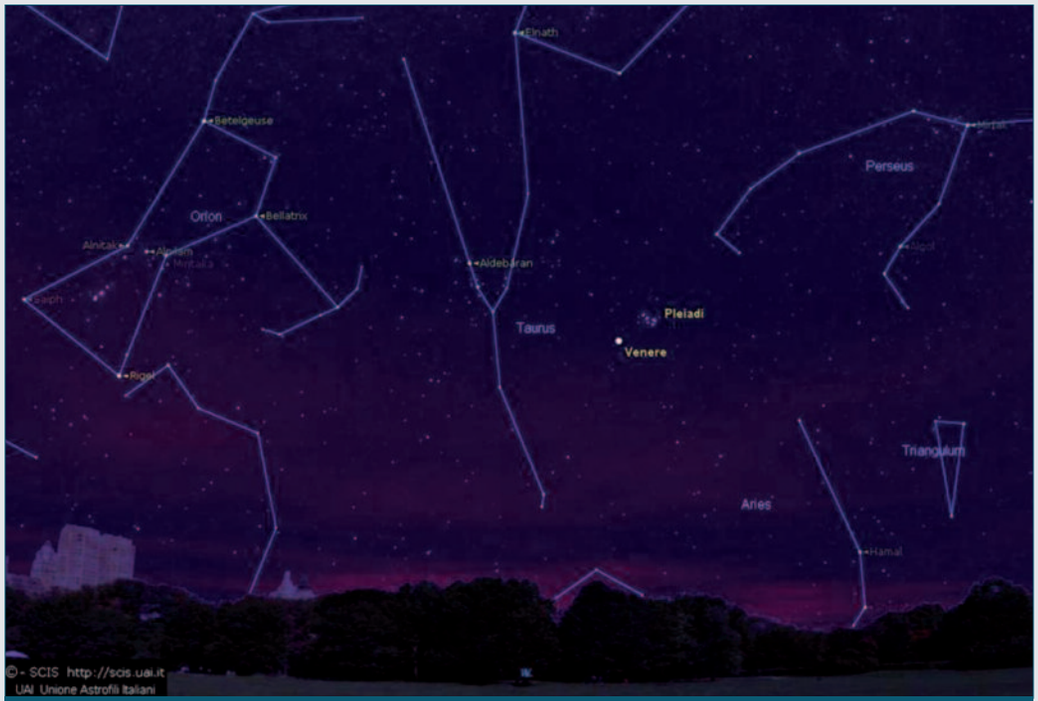

Fig. 1 - Le Pleiadi nel cielo notturno

Salvatore Mazzullo
SCI task force ESPERA:
Etica e Scienza per l'Ambiente
turi.mazzullo@libero.it

CAMBIAMENTI PALEOCLIMATICI PARTE 1 - TRACCE CLIMATICHE NELLA CIVILTÀ ARCAICA ALLA LUCE DI UN MODELLO MATEMATICO DI TEMPERATURA DELLA TERRA

Qual è la variazione della temperatura della Terra, dovuta alla variazione dell'energia solare incidente nell'atmosfera terrestre durante un intero ciclo di precessione? A questa domanda, risponde un modello di calcolo della temperatura, basato su un'equazione di bilancio dell'energia solare, mutuata dalla scala paleoclimatica di Milankovitch, che tiene conto dell'energia solare incidente, dell'inclinazione dell'asse terrestre e dell'eccentricità dell'orbita. I calcoli confermano l'esistenza di un optimum climatico nel 2˙500 a.C. e di un pessimum climatico nel 15˙000 a.C., in accordo con le risultanze geologico-climatiche nell'emisfero boreale. Secondo questo modello, a partire dall'optimum climatico, le temperature del solstizio d'estate stanno lentamente aumentando mentre al contrario, le temperature del solstizio d'inverno stanno lentamente diminuendo, alla velocità attuale di +0,09 °C/secolo nel solstizio d'estate e di -0,075 °C/secolo nel solstizio d'inverno.

Cambiamenti climatici e temperatura della Terra

I cambiamenti climatici sono oggetto di acceso dibattito della comunità scientifica internazionale. La tematica costituisce probabilmente l'emergenza più rilevante di questo secolo per le implicazioni di carattere scientifico, economico, politico e morale che comporta, come viene autorevolmente documentato dai rapporti annuali del IPCC [4]. Recentemente, J.E. Hansen [12] ha sottolineato che a tutt'oggi manca una

soddisfacente valutazione degli effetti paleoclimatici dei parametri orbitali della Terra, quali, inclinazione dell'asse terrestre, eccentricità dell'orbita e moto di precessione. La presente investigazione si colloca in questo ambito, cercando di fornire una risposta di tipo analitico al quesito di Hansen. È già stato sviluppato, in un precedente lavoro [3], un modello di calcolo di variazione periodica millenaria del clima della Terra, mutuato dalla scala paleoclimatica di Milankovitch, che tiene conto esclusivamente dell'energia solare incidente, dell'inclinazione dell'asse terrestre e dell'eccentricità dell'orbita durante il ciclo di precessione che comprende il tempo presente. Il modello ha messo in luce, non solo l'esistenza di un *optimum* climatico nel 2˙500 a.C., ma anche di un *pessimum* climatico nel 15˙000 a.C. in accordo con le risultanze geologico-climatiche nell'emisfero boreale. *L'optimum* e il *Pessimum* sono stati identificati sulla base della minima e massima escursione, dell'energia solare incidente fra semestre caldo e semestre freddo.

In questo lavoro viene affacciata una risposta all'altra naturale e affascinante domanda: qual è la variazione di temperatura attesa sulla Terra, in conseguenza della variazione dell'energia solare incidente sull'atmosfera terrestre, nel corso dei millenni?

Questa domanda, così semplice nella sua formulazione, suscita problematiche formidabili e può apparire ingenuo sperare di costruire una risposta credibile al quesito. Tuttavia, se ci si accontenta di tener conto delle sole componenti principali dei fenomeni climatici che determinano la ricorrenza ripetitiva delle stagioni, questo calcolo è possibile, con mezzi matematici elementari. La nitidezza oltre che ragionevolezza delle stime che ne derivano dà ragione, a posteriori, dell'opportunità di ricercare una capacità di giudizio personale, basata su dati razionali alla portata del singolo, uscendo dalla prigione delle considerazioni raggiungibili solo dalle grandi organizzazioni di ricerca.

Spero così di aver tracciato un solco fertile nel vivace terreno dei dibattiti sui cambiamenti climatici, facendo come il contadino ricordato da Cicerone [5], che per quanto vecchio e avanti negli anni, pianta ancora alberi che risulteranno utili, non per lui, ma per la generazione futura: *"serit arbores qui alteri saeculo prosint".* In questo azzardo sono anche incoraggiato dal celebre suggerimento dell'enciclopedista J.R. d'Alembert indirizzato agli scettici del calcolo differenziale: *"Calculé, calculé, la fois vous viendrà!"*

Tracce di cambiamenti climatici nella civiltà arcaica

Prima di iniziare, vorrei condividere con il lettore, sicuramente interessato ad avvicinarsi un po' di più al senso nascosto delle cose, le mie remote personali motivazioni a sviluppare questa investigazione. Ho conservato vivo, nei ricordi della mia infanzia in Sicilia, il ritorno della stagione estiva e la raccolta mattutina dell'uva e dei fichi per la famiglia che avevo il compito di andare a fare in collina, prima del gran caldo del giorno pieno, con mio fratello, di poco più vecchio di me.

Mi è rimasto impresso, pur essendo un bambino, questo carattere di

Fig. 2 - Re assiro su cocchio a caccia di leoni con l'arco

ritorno periodico e ripetitivo delle stagioni, uguale a sé stesso, senza sorprese, contrariamente alla diffusa percezione attuale che sente ogni ritorno estivo come potenzialmente ostile, per il gran caldo che potrebbe venire. Riflettendo sul passato, mi rendo conto, però, che una tradizione ancestrale dell'immaginario collettivo, motivata soprattutto dai lavori agricoli ha dato, da sempre, maggiore enfasi alla ricorrenza ripetitiva dei cicli stagionali della Terra, piuttosto che non alle frequenti violente bizzarrie del clima. Che questa tradizione sia realmente molto antica e che si rifaccia addirittura alla nascita della civiltà umana, lo si dimostra facilmente, perché è stata cantata e resa sublime dai poeti dell'antichità, per primo da Esiodo [1], nel poema arcaico *Le opere e i giorni*, (vv. 383-395):

Quando sorgono le Pleiadi figlie di Atlante, incomincia la mietitura; l'aratura, invece, al loro tramonto.

Queste sono nascoste per quaranta giorni e per altrettante notti; poi, inoltrandosi l'anno, esse appaiono appena che si affila la falce.

Tale è la norma dei campi, sia per quelli che abitano le opime terre che le valli incassate tra i dirupi, lontane dall'ondoso mare:

Semina nudo, nudo ara e nudo mieti, se vuoi a suo tempo compiere tutti i lavori di Demetra, affinché tutto cresca a suo tempo, né tu in seguito, indigente, debba mendicare per le case altrui senza nulla ottenere.

Questi pochi versi danno il respiro del ripetersi dei cicli stagionali ma dischiudono anche due indicazioni preziose: una di carattere cronologico e l'altra di carattere climatico. Relativamente al riferimento cronologico, nel primo verso leggiamo: "*Quando sorgono le Pleiadi, figlie di Atlante, incomincia la mietitura; l'aratura, invece al loro tramonto".*

Oggi le Pleiadi (Fig. 1) sorgono in primavera (4 aprile) e divengono pienamente visibili verso il 14 maggio, certamente, quindi non è ancora tempo di mietitura. Non è però che il poeta abbia sbagliato, solo che descriveva il cielo stellato della sua epoca.

La mietitura, ai nostri giorni, inizia nella seconda metà di giugno alle nostre latitudini e l'aratura in preparazione della successiva semina, nella seconda metà di settembre. Questa discrepanza tra passato e presente potrebbe, però, fornire un contributo alla cronologia esiodea sulla quale né gli antichi né i moderni sono concordi [1].

L'astronomia, con l'ausilio dei modelli di simulazione del cielo notturno dei planetari, potrebbe sciogliere questo nodo, sulla base del moto di precessione degli equinozi. Relativamente al riferimento climatico, nel-

l'ultimo verso leggiamo: "*Semina nudo, nudo ara e nudo mieti, se vuoi a suo tempo compiere tutti i lavori di Demetra…".* Questo particolare relativo all'abbigliamento più opportuno (*nudo, dal greco: gymnòn*, da cui il termine moderno: ginnastica) per fare i pesanti lavori campestri è indicativo di una temperatura e di un clima che, in Grecia, suggeriva di fare i lavori faticosi senza l'impaccio degli abiti.

Ma non è l'unico riferimento climatico che possiamo trovare nel mondo antico classico. La grande potenza mediorientale dell'VIII secolo a.C. fu l'Assiria, una civiltà che ha lasciato una testimonianza in campo iconografico unica al mondo, grazie alla sopravvivenza di molte incisioni artistiche su pietra. L'iconografia monumentale assira documenta che i re assiri andavano a caccia di leoni e li catturavano, Fig. 2.

Un bassorilievo del palazzo settentrionale di Ninive (nell'attuale Irak) mostra il re Assur-bani-pal mentre colpisce a morte un leone con la lancia [2].

Anche nella Bibbia ci sono molte tracce di un clima diverso dall'attuale, nel passato. La più impressionante si trova nel libro dei Giudici, all'interno del racconto della vita di Sansone, (Gdc 14,5):

Sansone scese con i suoi genitori a Timna (presso Gaza, in Palestina). Nei pressi della città, dove c'erano la vigne, un leone gli venne incontro ruggendo.

Il contesto storico nel quale si colloca le vicenda di Sansone è tra il XII e il X secolo a.C., sebbene il libro dei Giudici sia stato scritto all'epoca dell'esilio babilonese, nell'VIII secolo a.C. È notevole il fatto, registrato dall'autore biblico, che si potesse incontrare per strada un leone. Oggi i leoni vivono allo stato libero nella savana, di modo che possiamo azzardare l'estrapolazione che, nell'attuale territorio della Palestina, presso Gaza ci fosse, all'epoca di Sansone, un clima da savana africana, come pure in tutta la Mesopotamia.

Sin da piccolo sono stato affascinato dalla speranza di riuscire a stabilire una spiegazione razionale di queste diversità climatiche e ambientali del passato remoto.

Ora, sono riuscito, finalmente, a dare un carattere quantitativo a quello stupore infantile che ha attratto la mia attenzione curiosa verso il clima. Gli scenari climatici che verranno tratteggiati a conclusione di questo lavoro forniscono un quadro di sostanziale coerenza con queste tracce del passato.

È auspicabile un sistematico rinnovato sforzo di archeometria delle fonti arcaiche: esso potrebbe riservare conferme inaspettate per gli studiosi dei cambiamenti climatici.

Un modello di calcolo della temperatura terrestre

Per la costruzione del modello di calcolo della temperatura terrestre ci poniamo dal punto di vista astronomico, di un osservatore lontano, che vede la Terra come appare in Fig. 3, una sfera, sostanzialmente azzurra per la prevalenza dell'acqua che la ricopre, circondata da una tenue e sottile atmosfera gassosa. Un primo aspetto di cui si terrà conto, nel modello, è la geometria sferica della Terra: l'energia solare incidente sulla superficie esterna dell'atmosfera risulterà funzione della posizione sulla superficie sferica.

Un secondo aspetto di cui si terrà conto, molto schematicamente, è l'atmosfera terrestre. Il flusso di energia solare che investe la Terra, nell'attraversare i vari strati dell'atmosfera subisce trasformazioni e attenuazioni, quindi quello che giunge al suolo non è più uguale a quello in arrivo, né per intensità né per natura [11].

Altrettanto schematicamente si terrà conto della crosta terrestre in termini di capacità di accumulo e rilascio di energia solare. Infine, per quanto attiene alle problematiche più propriamente astronomiche, terremo conto delle seguenti scale dei tempi:

i) scala giornaliera di rotazione della Terra;
ii) scala annuale di rivoluzione;
iii) scala millenaria di variazione dell'eccentricità [13];
iv) scala millenaria di precessione.

È appena il caso di sottolineare che il modello astronomico non potrà fornire dettagli temporali sulla temperatura della Terra maggiori delle quattro scale dei tempi con i quali è stato formulato.

Poiché il nostro ideale osservatore si pone in una prospettiva spaziale astronomica, anche la scala dei tempi cui facciamo riferimento è quella della durata di un ciclo astronomico di precessione. Pertanto, l'orizzonte temporale dell'investigazione è quello di una singola osservazione ogni 50-100 anni. Ciò significa che il violento dettaglio statistico di variazione climatica annuale viene perso, a vantaggio della messa in luce di un valore medio di comportamento secolare che può ben essere descritto su basi deterministiche. La formulazione e la risoluzione del modello si trova in Appendice.

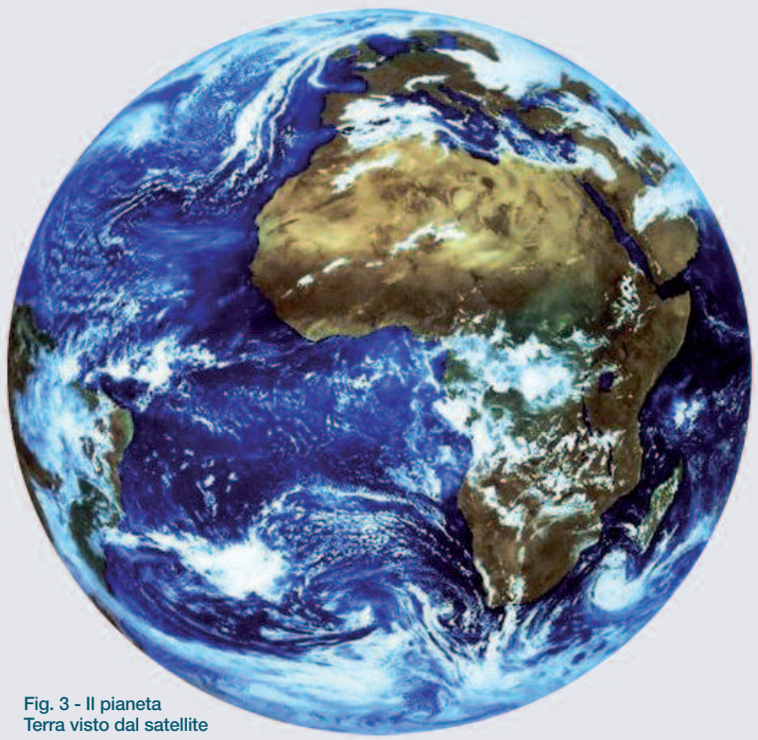

Fig. 3 - Il pianeta Terra visto dal satellite

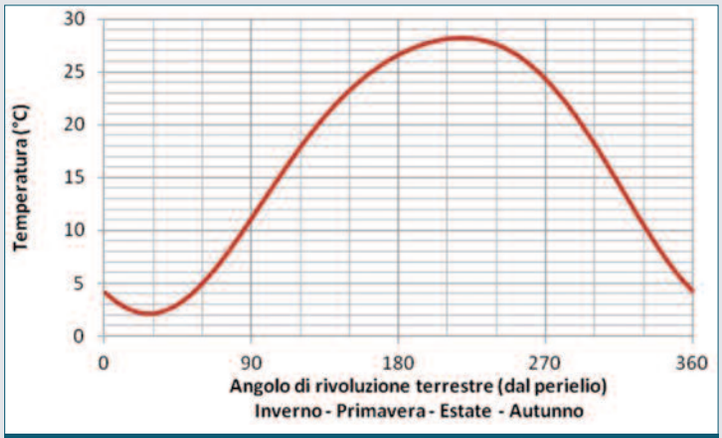

Fig. 4 - Temperatura media nell'emisfero boreale (lat. 30° nord)

Risultati numerici del modello

Definiamo *problema annuale* il calcolo del profilo giornaliero di temperatura della Terra, a mezzogiorno. Questo problema è risolto dall'equazione (A12) calcolata in funzione dell'angolo di rivoluzione α, dopo avere assegnato il valore dell'angolo di precessione β_0= -12°,8125 e dei parametri U,P,T_0,h forniti dalla Tab. A5. Il profilo di temperatura media dell'emisfero boreale è dato dalla Fig. 4 in funzione dell'angolo di rivoluzione terrestre, misurato a partire dal perielio. Il solstizio d'inverno corrisponde all'angolo $\alpha=\beta_0$=+347°,1875 e, a seguire, sommando volta a volta 90°, si incontra la primavera, l'estate e l'autunno. È impressionante come il semplice modello astronomico a tre termini descritto dall'equazione (A1), sia in grado di predire due significative evidenze della comune esperienza di ciascuno di noi, cioè che la temperatura più fredda dell'anno si raggiunge tra gennaio e febbraio e anche che la temperatura massima dell'anno si raggiunge nel mese di luglio. Va da sé che i valori numerici della temperatura prevista dal modello, sono frutto del procedimento di identificazione dei parametri liberi dell'equazione (A1). In questo lavoro, l'identificazione è stata effettuata attraverso le isoterme del globo terrestre lungo il parallelo di 30° di latitudine nord. Un raffinamento di questa scelta e una più accurata determinazione delle temperature di ciascuno spicchio sferico, potrebbero migliorare ulteriormente il valore numerico della temperatura media dell'emisfero boreale. Si sottolinea, infine, che la temperatura media va estesa, almeno, alla durata di tempo necessario a percorre l'arco di 1° di precessione, cioè, poco più di settant'anni.

Sulla scorta della soluzione del *problema annuale*, si può fare l'ulteriore azzardo di ritenere che tutti i parametri identificati siano invarianti all'interno del ciclo di precessione. È importante sottolineare che non c'è nessuna speciale ragione per ritenere valida questa ipotesi, tuttavia se l'accettiamo, siamo in grado di risolvere anche il *problema millenario,* cioè calcolare il profilo annuale di temperatura delle quattro stagioni, durante l'intero ciclo di precessione attuale, tenendo conto anche della variazione dell'eccentricità dell'orbita terrestre [13]. Questo problema è risolto, ancora una volta, dall'equazione (A12), con la seguente avvertenza: la temperatura del solstizio d'inverno si ottiene quando l'angolo di rivoluzione α coincide con l'angolo di precessione β, in simboli, α-β=0. A seguire, le altre stagioni: primavera, estate e autunno hanno luogo quando α-β = π/2; π; 3π/2, rispettivamente. I profili delle temperature millenarie delle quattro stagioni dell'anno sono indicati in Fig. 5. Balza immediatamente all'occhio che le temperature d'inizio delle quattro stagioni sono a due a due simili: estate ed autunno oscillano attorno alla temperatura media di 29 °C mentre inverno e primavera oscillano attorno alla temperatura media di 5 °C. La coppia delle temperature estate/inverno si presenta, quasi esattamente, in opposizione di fase e, analogamente, la coppia primavera/autunno, con uno sfasamento in avanti.

Raccogliamo in Tab. 1, per una preliminare valutazione, i valori massimi e minimi delle temperature millenarie.

L'escursione termica annuale fra il solstizio d'estate e il solstizio d'inverno fornisce nitidamente un massimo, (ΔT=31,36 °C) corrispondente all'anno 15˙000 a.C. e un minimo, (ΔT=14,59 °C) corrispondente al 2˙500 a.C. Questi due anni sono già stati classificati precedentemente [3], come *pessimum ed optimum climatico,* poiché soddisfano, rispettivamente, al criterio energetico di massima e minima escursione annuale fra semestre caldo e semestre freddo del flusso di energia solare. Anche l'escursione termica agli equinozi segnala una notevole coppia: un minimo (ΔT=16,38 °C) relativo all'anno 21˙250 a.C. e un massimo (ΔT=32,98 °C) associato all'anno 8˙800 a.C. Si osserva ancora un minimo (ΔT=17,10 °C) relativo all'anno 3˙900 d.C. da associare, però, al successivo ciclo di precessione che comprende il

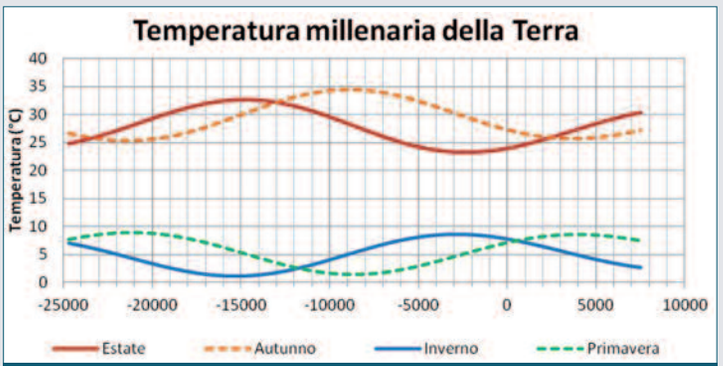

Fig. 5 - Stima modellistica della temperatura media stagionale della Terra

Tab. 1 - Temperature millenarie della Terra nelle quattro stagioni ed escursione annua ai solstizi e agli equinozi

Anno	Solstizio Inverno	Solstizio Estate	Escursione (Est.-Inv.)	Equinozio Primavera	Equinozio Autunno	Escursione (Aut.-Prim.)
	T (°C)	T (°C)	T (°C)	T (°C)	T (°C)	T (°C)
21.250 a.C.				8,97	25,35	16,38
15.000 a.C.	1,21	32,57	31,36			
8.800 a.C.				1,44	34,42	32,98
2.500 a.C.	8,61	23,20	14,59			
3.900 d.C.				8,62	25,72	17,10

tempo presente. Si pone ora l'esigenza di classificare unitariamente questi risultati, da un punto di vista climatico, ciò che verrà fatto nella seconda parte di questo lavoro.

Considerazioni conclusive

Dall'osservazione del profilo delle temperature millenarie delle quattro stagioni della Fig. 5, emerge il fatto notevole che, a partire dal 2'500 a.C., cioè dall'*optimum climatico*, mentre le temperature del solstizio d'estate stanno lentamente aumentando, al tasso attuale di +0,09 °C/secolo, al contrario, le temperature del solstizio d'inverno stanno lentamente diminuendo, al tasso attuale di -0,075 °C/secolo. In altri termini, l'escursione annua della temperatura della Terra ai solstizi tenderà ad aumentare sino al prossimo *pessimum climatico*. Colpisce la piccola entità delle variazioni secolari dovute al moto naturale di precessione, se paragonata alle forti escursioni climatiche di cui si dibatte accanitamente oggi, che sono da attribuire, quindi, ad altri fenomeni, appena accennati in questo lavoro, (vedi Appendice A2.1), cioè fra le cause naturali, alla variazione di attività solare di breve e medio periodo e fra quelle di origine antropica, alla variazione di spessore dei gas serra.

Bibliografia

[1] Esiodo, Le opere e i giorni. Parte terza: *I lavori*, vv.383-694, a cura di Werner Jaeger, Biblioteca Universale Rizzoli, classici greci e latini BUR, 2004.
[2] C. Mason, P. Alexander, Immagini del mondo biblico, 1991, Claudiana Ed., Torino pag. 81, fig. 5.23.
[3] S. Mazzullo, *Chimica e Industria,* 2011, **93**(3), 88.
[4] IPCC: Intergovernmental Panel on Climate Change, Annual Reports 2001-2010.
[5] M.T. Cicerone, De senectute, *La lira di Socrate,* 24, Armando Ed., 2002.
[6] K. Stumpff, Astronomia*, Fisica del sole*, Enciclopedia Feltrinelli Fischer, Feltrinelli Ed., 1971 pp. 154-156.
[7] Atlante geografico generale, Zanichelli Ed., Bologna, 1975.
[8] W.T. Norton, Gli esperimenti facili. Energia solare, Cap. 2.4 Insolazione, Muzzio Ed., 1980, pp. 128-132.
[9] G.A. Korn, T.M. Korn, Mathematical handbook for scientists and engineers. Appendix E: Integral tables, nr. 322, McGraw-Hill Book Company, 1961, pp. 926-988.
[10] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of heat in solids. Oxford University Press, 1980.
[11] C. Mercatali, Geodinamica, Cap. 1, Atmosfera, Ed. Giunti Marzocco, 1990, pp. 4-17.
[12] J.E. Hansen, Mki. Sato, 2011: Paleoclimate implications for human-made climate change, in Climate Change: Inferences from Paleoclimate and Regional Aspects, A. Berger, F. Mesinger, D. Šijački (Eds.), Springer, in press.
[13] A. Berger, M.F. Loutre, *Quaternary Science Reviews,* 1991, **10**, 297.
[14] R. Bellman, R. Roth, Quasilinearization and the identification problem, World scientific, 1983.

ABSTRACT

Paleoclimatic Changes - Part 1

Which is the variation of the temperature of the Earth, due to the variation of incident solar energy in the atmosphere during a full cycle of precession? This question is answered by a model calculation of the temperature, based on solar energy balance equation, borrowed from the Milankovitch paleo-climatic scale, which takes into account the incident solar energy, the inclination axis and the eccentricity of the Earth's orbit. The calculations confirm the existence of a climatic optimum in 2'500 BC and a climate pessimum in 15'000 BC, in agreement with geological and climatic findings in the northern hemisphere. According to this model, starting from the optimum climate, the temperatures of the summer solstice are slowly rising while on the contrary, the temperatures of the winter solstice are slowly decreasing, at the present rate of +0.09 °C/century in the summer solstice and -0.075 °C/century in the winter solstice.

APPENDICE

A1. Modello matematico della temperatura della Terra

A1.1 Equazione di bilancio di energia

Data la lontananza del punto di osservazione, i fenomeni atmosferici convettivi e diffusivi sono come appiattiti sulla superficie della Terra e non siamo, quindi, in grado di osservare ciò che accade lungo lo spessore dell'atmosfera. Di conseguenza, il modello matematico che descrive i fenomeni atmosferici, cioè l'equazione di diffusione e convezione del calore, collassa in una equazione differenziale ordinaria con un termine di accumulo, uno di sorgente e uno di perdita per l'atmosfera terrestre che riceve e parzialmente disperde il calore del Sole:

$$\rho C_p h\,\omega \cdot \frac{dT}{d\alpha} + U \cdot (T - T_0) = F(\alpha, \beta, e) \qquad \text{(A1)}$$

con la condizione iniziale:

$$T(0) = T_i \qquad \text{(A2)}$$

L'equazione (A1) è il più semplice bilancio di energia solare che si possa

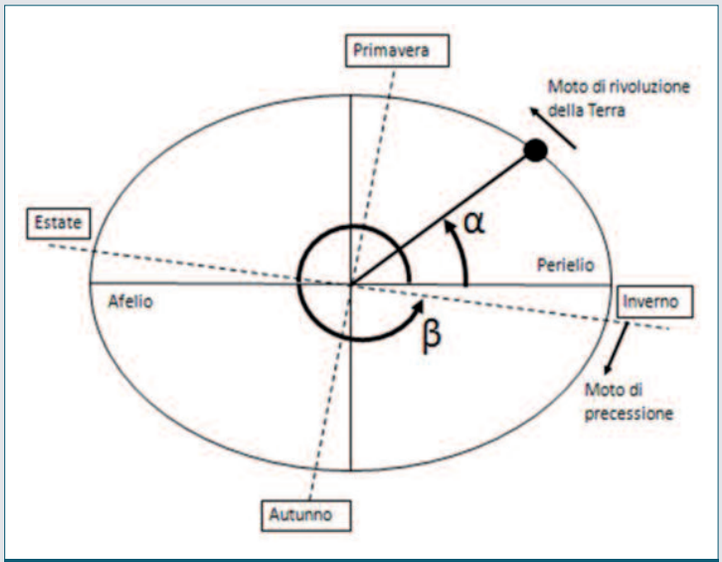

Fig. A1 - Sequenza delle stagioni sulla Terra, con indicazione dell'angolo di rivoluzione α e dell'angolo di precessione β, sul piano dell'eclittica

Tab. A1 - Dati astronomici di riferimento

Velocità di rivoluzione	Velocità di precessione	Anno solare giuliano	angolo di precessione (2010 d.C.)
ω	σ	anno	β_0
(°)arco/anno	(")arco/anno	giorni	347,1875 (°)arco
360	50,256	365,2425	6,0595 radianti

scrivere per il sistema Sole/Terra. Tutte la informazioni relative al flusso di energia solare sono racchiuse nel termine di sorgente $F(\alpha,\beta,e)$, riflesso dalla superficie terrestre verso l'atmosfera. L'equazione (A1) ci dice, sostanzialmente, che il termine di sorgente risulta costantemente uguale al flusso uscente $U\cdot(T-T_0)$ sommato al termine di accumulo $\rho C_p h\omega\cdot dT/d\alpha$, dove h è lo spessore del comparto suolo/acqua interessato al fenomeno di accumulo e rilascio di calore.

Il parametro U è la trasmittanza della Terra, cioè il coefficiente di scambio termico dell'atmosfera terrestre verso lo spazio esterno, immaginato alla temperatura T_0 costante. Cosicché il comportamento della Terra è omogeneo e isotropo lungo ciascun parallelo ma varia lungo i meridiani, andando dall'equatore ai poli. Possiamo attribuire alla equazione (A1), il carattere di una definizione e considerarla, a tutti gli effetti, come l'*equazione costitutiva* del modello di Terra considerato nel seguito di questo lavoro.

Nell'equazione di bilancio di energia (A1) abbiamo scelto come variabile indipendente la posizione angolare α della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, invece del tempo t. L'angolo di rivoluzione α, misurato a partire dal perielio sulla linea degli apsidi, Fig. A1, ha un andamento antiorario. Esso è legato al tempo di percorrenza dell'orbita terrestre dalla relazione $\alpha=\omega t$, dove ω=360°/anno è la velocità angolare media riferita all'anno solare di 365,2425 giorni [6].

Il termine di sorgente $F(\alpha,\beta,e)$ è funzione della posizione angolare α oltre che dell'angolo di precessione β e dell'eccentricità "e" dell'orbita terrestre. L'angolo di precessione β è misurato anch'esso a partire dal perielio ma procede in senso orario (contrariamente al moto di rivoluzione) a un tasso medio annuo, σ=50,256"/anno [6].

Il legame fra i due angoli è espresso dalla relazione, $\alpha=-\omega\beta/\sigma=-25^{\cdot}788\cdot\beta$ ovvero, l'arco di un grado di precessione (in senso orario), corrisponde a un arco di rivoluzione (in senso antiorario) di 25°788 gradi, equivalenti a 71,633 anni solari. Il solstizio d'inverno ha avuto luogo esattamente al perielio nell'anno 1°092 d.C. mentre oggi (2°010 d.C.) ha avuto luogo a un angolo di precessione β_0=+347°,1875. La Tab. A1 raccoglie questi dati astronomici.

A1.2 Formulazione del termine di sorgente

Tutto lo sforzo modellistico risiede nella formulazione del termine di sorgente $F(\alpha,\beta,e)$ dell'energia solare. Esso verrà rappresentato mediante il prodotto di un valore medio F_0 e di tre fattori (f_1,f_2,f_3) i quali descrivono i seguenti aspetti [3]:

1. la distanza Sole/Terra, variabile con la posizione angolare e l'eccentricità dell'orbita terrestre, (f_1);
2. l'attenuazione dell'energia solare nell'attraversamento dell'atmosfera, (f_2);
3. l'inclinazione dell'asse terrestre sul piano dell'eclittica e l'insolazione dovuta alla sfericità della Terra, (f_3).

Il fattore f_1 evidenzia che il flusso giornaliero di energia solare incidente al bordo esterno dell'atmosfera è funzione esclusivamente della posizione angolare della Terra sul piano dell'eclittica e dell'eccentricità dell'orbita, variabile nei millenni [13]:

$$f_1(\alpha,e)=\left(\frac{1+e\cdot cos\alpha}{1-e^2}\right)^2 \qquad \text{(A3)}$$

Il fattore f_2 tiene conto del fatto che nell'attraversamento dell'atmosfera la radiazione solare incidente subisce una complessa serie di trasfor-

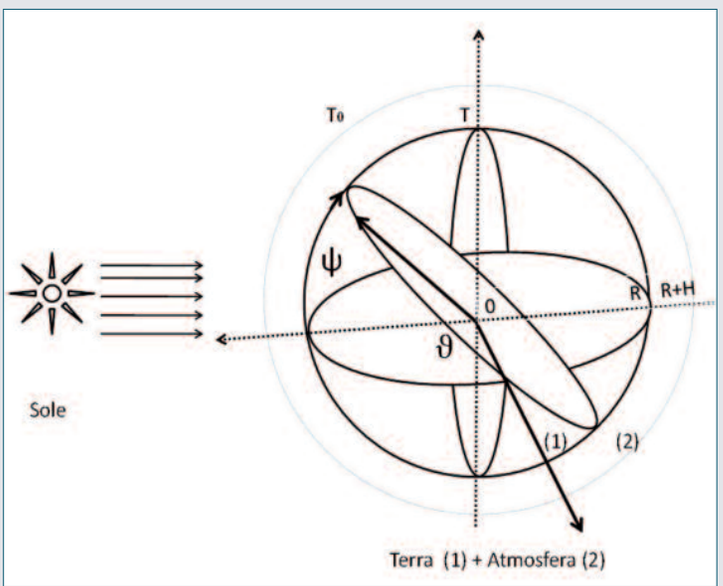

Fig. A2 - Coordinate polari del sistema Sole/Terra. R, raggio della Terra; H, spessore dell'atmosfera; T, temperatura al suolo; T_0, temperatura al bordo dell'atmosfera

mazioni e attenuazioni, quindi quello che giunge al suolo non è più uguale a quello in arrivo al bordo esterno dell'atmosfera, né per intensità né per natura. Il parametro intensivo f_2=*0,633* [8], costituisce il fattore moltiplicativo netto di insolazione, comprensivo di tutti questi fenomeni.
Il fattore f_3 calcola la radiazione solare ricevuta da una superficie sferica, tenendo conto dell'inclinazione dell'asse terrestre, durante il moto di rivoluzione [3]. Con riferimento alla Fig. A2, il fattore f_3 valuta gli effetti termici dell'energia solare lungo un meridiano fissato, nell'arco delle dodici ore di insolazione.
Per comodità di calcolo, scegliamo un sistema di coordinate polari riferito alla linea di illuminazione che separa il giorno dalla notte dove, R è il raggio della Terra, ϑ è l'angolo di zenith misurato a partire dal punto di intersezione dell'equatore con la linea di illuminazione e ortogonale ad essa, ψ è l'angolo di azimuth misurato rispetto all'equatore, lungo il meridiano polare. Le considerazioni quantitative seguenti si riferiscono all'emisfero boreale, di conseguenza, l'angolo ϑ varia nell'intervallo [0-π] per tutte le stagioni, mentre l'angolo di azimuth varia da ψ=+23°27' sino a 90° nord nel solstizio d'inverno; assume valori nell'intervallo [0-90° nord] agli equinozi e varia da ψ=-23°27' sino a 90° nord nel solstizio d'estate.
Il fattore f_3 si ottiene in due passaggi. Si calcola l'integrale F_3 della componente normale I^n=*cos*ψ*sin*ϑ alla superficie sferica di area infinitesima dS=*Rd* ϑ*Rsin* $\vartheta d\psi$ esteso alla superficie illuminata:

$$F_3 = \iint cos\psi\ R\ sin^2\theta\ \ d\psi\ Rd\theta = R^2[sin\psi]_{\psi}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sin2\theta}{4}\right]_0^{\pi} \qquad (A4)$$

Si calcola l'area della superficie illuminata dal Sole:

$$Sil = 2 \cdot R^2 \cdot \left[+\frac{\pi}{2} - \psi\right] \qquad (A5)$$

Si fa il rapporto delle due espressioni e si ottiene la funzione dell'energia solare media giornaliera f_3:

$$f_3 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{[1 - sin\psi]}{\left[+\frac{\pi}{2} - \psi\right]} \qquad (A6)$$

In questa formula, l'angolo di azimuth ψ stabilisce il giorno dell'anno e descrive, quindi, il periodico ripresentarsi delle stagioni. Possiamo approssimarlo attraverso la funzione:

$$\psi = \delta cos[\alpha\text{-}\beta] \qquad (A7)$$

dove δ=23°27' è l'inclinazione dell'asse terrestre sull'eclittica. In tal modo, f_3 assume l'espressione esplicita:

$$f_3(\alpha,\beta) = \frac{1 - sin[\delta \cdot \cos(\alpha - \beta)]}{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \delta \cdot \cos(\alpha - \beta)} \qquad (A8)$$

Il fattore f_3 scandisce il volgere delle stagioni: il solstizio d'inverno ha luogo quando l'angolo di rivoluzione α coincide con l'angolo di precessione β, in simboli α-β=*0*. A seguire, le altre stagioni: primavera, estate e autunno hanno luogo quando α-β=π/2; π; 3π/2 rispettivamente.
L'effetto di riduzione operato dal fattore geometrico f_3 è imponente, infatti, il valore massimo dell'energia solare incidente si ha in inverno, in corrispondenza con il passaggio al perielio, mentre, a causa dell'inclinazione dell'asse terrestre, il massimo al suolo si raggiunge all'inizio dell'estate, quando la Terra è all'afelio. Di conseguenza, l'inclinazione dell'asse è la principale causa del volgere delle stagioni. In definitiva, il termine di sorgente si scrive:

$$F = \frac{F_0}{2} \cdot f_1(\alpha, e) \cdot f_2 \cdot f_3(\alpha, \beta) \qquad (A9)$$

dove, la costante F_0 rappresenta il flusso medio di energia solare sulla Terra, riferito al raggio medio "*a*" dell'orbita:

$$F_0 = \frac{H_0}{a^2} \qquad (A10)$$

La costante di emissione solare nello spettro luminoso-termico assume il valore H_0=3,022·10^{25} *W* [3]. Esso non coincide con la costante di emissione del Sole in tutto lo spettro H=3,826·10^{26} *W*, ben nota dalla letteratura [6], ma è minore per circa un ordine di grandezza, coerentemente con il fatto che stiamo considerandone la restrizione allo spettro luminoso-termico. La relazione "esatta" del flusso di energia solare F può essere linearizzata, ai fini dei calcoli successivi, mediante sviluppo in serie di funzioni circolari, troncato al secondo ordine, ottenendosi:

$$F = \frac{F_0}{2a_0} f_2 \cdot \{1 + a_1 cos\alpha + a_2 cos(\alpha - \beta) + b_0 cos^2\alpha + \\ + b_1 cos\alpha \cdot cos(\alpha - \beta) + b_2 cos^2(\alpha - \beta)\} \qquad (A11)$$

La definizione dei parametri e il loro valore è raccolto in Tab. A2.

Tab. A2 - Parametri astronomici del flusso di energia solare

Parametro	Valore	Parametro	Valore
H_0	3,022·10^{25} W	a	149,5·10^6 km
F_0	1352 W/m^2		
e	+0,0167	δ=23°27'	+0,409280
$a_0 = (1\text{-}e^2)^2$	+0,999442	$b_0 = e^2$	+0,000279
$a_1 = 2e$	+0,0334	$b_1 = a_1 a_2$	-0,004967
$a_2 = -(1\text{-}2/\pi)\sigma$	-0,148724	$b_3 = a_2 (a_2 + \delta)$	-0,038751

A1.3 Soluzione analitica del modello

La soluzione dell'equazione di bilancio (A1) si scrive come somma di due componenti: una componente infinitesima e una componente finita, entrambe con carattere periodico. La prima tende asintoticamente a zero al crescere dell'angolo di rivoluzione α ed è funzione della condizione iniziale. La seconda è indipendente dalla condizione iniziale e descrive il comportamento stabile, di carattere periodico della soluzione, quando l'effetto della condizione iniziale si è esaurito ed è stato assorbito dal sistema modello. Possiamo riferirci a questa componente finita della soluzione come alla *soluzione asintotica*. Essa ha la seguente espressione:

$$T = T_0 + \frac{F_0}{2a_0}\frac{f_2}{U}\{1 + \quad \text{(A12)}$$
$$+\frac{P}{P^2+1}\{a_1[Pcos\alpha + sin\alpha] + a_2[Pcos(\alpha-\beta) + sin(\alpha-\beta)]\} +$$
$$+\frac{P}{P^2+4}b_0\left\{cos\alpha[Pcos\alpha + 2sin\alpha] + \frac{2}{P}\right\} +$$
$$+\frac{P}{P^2+4}\frac{b_1}{2}\left\{[Pcos(2\alpha-\beta) + 2sin(2\alpha-\beta)] + \frac{P^2+4}{P}cos\beta\right\} +$$
$$+\frac{P}{P^2+4}b_2\left\{cos(\alpha-\beta)[Pcos(\alpha-\beta) + 2sin(\alpha-\beta)] + \frac{2}{P}\right\}\}$$

Il parametro adimensionale *P* che figura nella soluzione asintotica ha la seguente definizione:

$$P = \frac{U}{\rho C_p h\omega} \quad \text{(A13)}$$

A1.4 Identificazione dei parametri liberi

Nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie si insegna a costruire una soluzione a equazioni del tipo (A1), quando siano assegnati i parametri liberi (U,h,T_0) e la condizione iniziale (A2). Nel nostro caso, al contrario, sono noti alcuni valori sperimentali della soluzione, cioè la temperatura annuale della Terra e dobbiamo determinare i parametri liberi e la condizione iniziale in modo da approssimare, al meglio, i dati sperimentali. Ci troviamo, cioè, a dover risolvere il problema inverso della identificazione dei parametri, così come descritto, per esempio da Bellman [14]. Nella equazione (A12) risultano, per il momento, incogniti i parametri fisici (U,P,T_0) e, tenendo conto della definizione (A13) risulta incognito anche lo spessore *h*. Il procedimento elementare di identificazione dei parametri incogniti si rifà a metodi "esatti" di soluzione di un sistema algebrico di n-equazioni in n-incognite.

Per effettuare l'identificazione, i dati sperimentali più importanti e popolari di cui disponiamo sono la isoterme di gennaio e di luglio della Terra, sotto forma di mappe tematiche, per es. negli atlanti geografici [7] oppure su internet. Da queste mappe si può ricavare il valore della temperatura media aritmetica, lungo un prefissato parallelo. Per prossimità con la storia della civiltà occidentale scegliamo l'emisfero boreale, calcolando un valore medio di temperatura a 30° di latitudine nord, come da Tab. A3 e Tab. A4. Sostituendo i valori delle due temperature medie nella soluzione asintotica (A12), cioè T_1 in corrispondenza di gennaio, (α-β_0=0) e T_2 in corrispondenza di luglio, (α-β_0=π), si ottengono due equazioni che assieme alla definizione (A13) costituiscono un sistema *non lineare* di tre equazioni nelle quattro incognite (U,P,T_0,h). Apparentemente ci troviamo di fronte a un sistema sotto determinato e quindi, non risolubile. Per renderlo determinato è necessario introdurre una quarta equazione la quale è suggerita dalla non linearità delle equazioni: un generico sistema non lineare può ammettere più di una soluzione, ma il senso fisico del modello richiede l'esistenza di una e una sola soluzione. Pertanto imponiamo, come quarta equazione al sistema di identificazione dei parametri, il vincolo qualitativo e quantitativo di esistenza e unicità della soluzione. Indicando cumulativamente col simbolo Π tutti i termini noti del problema, il valore dei quattro parametri incogniti (h,P,U,T_0) risulta:

$$h = \frac{-a_1 sin\beta_0 + \sqrt{(a_1 sin\beta_0)^2 + (a_1 cos\beta_0 + a_2)^2}}{2\Pi} \quad \text{(A14)}$$

$$P = -\frac{a_1 cos\beta_0 + a_2}{2\Pi \cdot h} \quad \text{(A15)}$$

$$U = \rho C_p \omega h \cdot P \quad \text{(A16)}$$

$$T_0 = T_1 - \frac{F_0}{2a_0}\frac{f_2}{U}\left\{1 + \frac{P}{P^2+1}\{a_1[Pcos\beta_0 + sin\beta_0] + a_2 P\} + \right.$$
$$+\frac{P}{P^2+4}\left\{b_0\left[cos\beta_0[Pcos\beta_0 + 2sin\beta_0] + \frac{2}{P}\right] + +b_2\left[P + \frac{2}{P}\right] + \right. \quad \text{(A17)}$$
$$\left.\left.+\frac{b_1}{2}\left[[Pcos\beta_0 + 2sin\beta_0] + \frac{P^2+4}{P}cos\beta_0\right]\right\}\right\}$$

$$\Pi = \left[\frac{(T_2 - T_1)\cdot a_0 \rho C_p \omega}{f_2 F_0}\right] \quad \text{(A18)}$$

Tab. A3 - Isoterme di gennaio della Terra [7]

Isoterme di gennaio: 30° lat. nord												
Proiezione di Mercatore												
Longitudine (-est; +ovest)	-150°	-120°	-90°	-60°	-30°	0°	+30°	+60°	+90°	+120°	+150°	+180°
Temperatura (°C)	+10,8	+10,1	+7,5	+15	+13,1	+10	+7,5	+5	-5	-5	+2,5	+7
Temperatura di gennaio (media aritmetica): T=+6,46 (°C)												

Tab. A4 - Isoterme di luglio della Terra [7]

Isoterme di luglio: 30° lat. nord												
Proiezione di Mercatore												
Longitudine (-est; +ovest)	-150°	-120°	-90°	-60°	-30°	0°	+30°	+60°	+90°	+120°	+150°	+180°
Temperatura (°C)	+20	+20	+30	+25	+25	+25	+25	+40	+30	+25	+20	+20
Temperatura di luglio (media aritmetica): T=+25,42 (°C)												

Tab. A5 - Valori numerici dei parametri liberi identificati

Parametro	Valore	Parametro	Valore
U	+2,622 *W/(m²K)*	Π (acqua)	+1067 m^{-1}
P	+0,938	Π (acqua)	+0,058 m
		Π (suolo)	+0,529 m^{-1}
T_0	-143,12°C	Π (suolo)	+0,117 m

Tab. A6 - Effetto qualitativo che una variazione di spessore dei gas serra induce sui parametri U,P

l	*U=k/l*	P=U/($\rho C_p h\omega$)	Effetto climatico
↑ =	↓	↓	*Instabilità*
↓ =	↑	↑	*Stabilità*

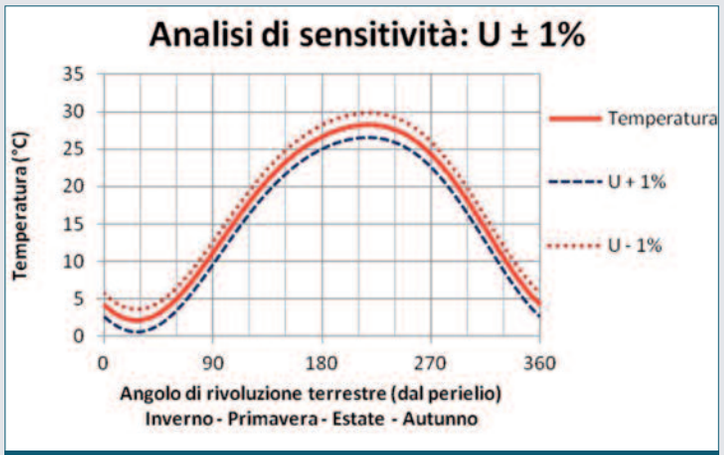

Fig. A3 - Effetto quantitativo che una variazione di spessore dei gas serra induce sulla temperatura media della Terra, attraverso il parametro U

Nella Tab. A5 sono raccolti i valori numerici dei parametri della soluzione all'equazione (A1) identificati sulla base delle isoterme annuali di gennaio e di luglio della Terra.

A.2 Discussione sul modello di calcolo della temperatura

A.2.1 Significatività dei parametri liberi identificati

È di cruciale importanza che i parametri liberi (U, T_0, h, P) dell'equazione del modello astronomico (A1), identificati col procedimento descritto, abbiano un valore sensato e che, di conseguenza, abbia senso fidarsi delle proiezioni che si potranno trarre dal modello, come conseguenza del valore attribuito ad essi. Per definizione, il coefficiente di trasmissione globale del calore U di un generico materiale piano si scrive, $U=k/l$, dove k è la conducibilità termica del materiale di spessore l. Nel nostro caso, la conducibilità cui far riferimento, è quella del sottile strato di gas serra (ozono, anidride carbonica, metano, ecc.) che circondano la Terra. In Tab. A6 è riassunto l'effetto qualitativo che una variazione di spessore dei gas serra induce sui parametri U,P:

Da un punto di vista quantitativo, il valore identificato di U è indice di una resistenza termica praticamente coincidente con quella di un muro di mattoni pieni dello spessore di 24 cm di una comune abitazione, R=0,378 $(m^2°C/W)$ [8]. Da questo confronto, viene fatto di pensare che non è affatto una licenza poetica alludere alla Terra come alla *casa comune* degli uomini! La temperatura media della Terra è molto sensibile alla trasmittanza U: piccole variazioni dell'ordine di grandezza di ±1% inducono una variazione della temperatura media della Terra del -/+6%, cioè, amplificata e di segno opposto, come si può notare dalla Fig. A3. Un effetto simile, per intensità ma dello stesso segno, esercita la costante solare F_0, di cui alla Tab. A2, che rappresenta il flusso medio di energia solare sulla Terra. Variazioni anche piccole e di breve periodo dell'attività solare hanno immediato amplificato riscontro sulla temperatura della Terra. Il valore del parametro di smorzamento P è prossimo a uno; ciò significa che una generica perturbazione della soluzione del modello viene attenuata da un fattore esponenziale, ($exp\text{-}P\alpha$), sino ad annullarla piuttosto rapidamente, diciamo entro sei mesi dal suo insorgere. Da questa considerazione possiamo dedurre che il modello astronomico è relativamente insensibile al valore assunto dalla condizione iniziale, conformemente all'esperienza, (ad esempio, un inverno particolarmente freddo non comporta, necessariamente, che la primavera sia fredda). Infine, la temperatura al bordo esterno dell'atmosfera, T_0= -143 °C è compatibile con la temperatura della mesosfera a una quota di ~100 km sul livello del mare. Anche il valore numerico dello spessore h ottenuto dal modello di identificazione presenta una notevole consistenza. Si noti, infatti [10], che un fenomeno di diffusione del calore si può considerare, a fini pratici, concluso quando il numero di Fourier assume un valore unitario, $F_0=Dt/(2h)^2 \sim 1$. Nel nostro caso, lo spessore h ha proprio l'ordine di grandezza $h=(\sqrt{Dt})/2$, come è indicato nell'ultima colonna della Tab. A7 per alcune sostanze sottoposte al processo di diffusione durante il tempo t pari alla durata di un giorno medio di insolazione, $t = 1/\omega \approx 8{,}76 \cdot 10^4$ *sec*.

Tab. A7 - Proprietà termiche di alcune sostanze [10]

	ρ	Cp	K	$D=k/(\rho \cdot Cp)$	$h=(\sqrt{Dt})/2$
	kg/m^3	$J/(g \cdot °C)$	$W/(m \cdot °C)$	m^2/sec	m
Suolo	2500	837	963	$4{,}60 \cdot 10^{-7}$	$1{,}00 \cdot 10^{-1}$
Calcare	2500	921	1,67	$7{,}25 \cdot 10^{-7}$	$1{,}25 \cdot 10^{-1}$
Ghiaccio	920	2,10	2,22	$1{,}15 \cdot 10^{-6}$	$1{,}60 \cdot 10^{-1}$
Acqua	1000	4,19	603	$1{,}44 \cdot 10^{-7}$	$0{,}55 \cdot 10^{-1}$

A.2.2 Effetti millenari dell'escursione termica annuale

La risposta del sistema Terra/Atmosfera non è simmetrica rispetto al riscaldamento estivo e al raffreddamento invernale: l'asimmetria è dovuta al tempo richiesto per lo scioglimento estivo dei ghiacci formatisi durante l'inverno. Questa tipo di problema riguardante i cambiamenti di stato fisico delle sostanze, meglio noto come "problema di Stefan" [10], presenta notevoli difficoltà matematiche. Mentre la formazione dei ghiacci, per accumulo di neve durante l'inverno, può avere l'ordine di grandezza dei metri al giorno, in dipendenza dell'intensità delle nevicate, lo scioglimento dei ghiacciai durante il periodo estivo è molto più lento. Se il nostro obiettivo è quello di stimare di quanto arretra il fronte dei ghiacciai, lungo la linea dell'isoterma a 0 °C durante il periodo estivo di insolazione, cioè per il tempo $t \approx 4 \cdot 10$ *sec*, allora, lo spessore χ di avanzamento della linea isoterma di 0 °C nella massa del ghiaccio, di conseguenza, lo spessore che si scioglie può essere stimato con la formula di Neumann [10], dove si è posto λ=0,056 e D è la diffusività del ghiaccio:

$$\chi = 2\,\lambda\,\sqrt{D \cdot t} \cong 0{,}24\ m \qquad \text{(A19)}$$

Acquisito che l'ordine di grandezza di arretramento estivo dei ghiacciai è meno di un metro per estate, è inevitabile che il fronte di avanzamento dei ghiacciai proceda a coprire, definitivamente, in una morsa gelata l'emisfero boreale al diminuire della temperatura media invernale col procedere del tempo durante le stagioni millenarie fredde.

ETICA