Numeri e quanti:
ma quanti numeri …!!

Prof. Ugo Cosentino
Dipartimento di Scienze dell'Ambiente e della Terra
Università di Milano-Bicocca

XI SCUOLA NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA CHIMICA "GIUSEPPE DEL RE"
Ancona 19-22 settembre 2026

I numeri quantici sono introdotti nei primi modelli atomici («**vecchia teoria dei quanti**») per interpretare gli spettri atomici di emissione :

- **Elettrone: particella** che percorre **orbite** (traiettorie) intorno al nucleo
- **Energie e orbite sono quantizzate** (quantizzazione momento angolare)
- **Orbite stazionarie**

Spettroscopia	Modello	Orbite	n. quantico
Spettri a righe	Bohr (1913)	Circolari	**n**
Struttura fine	Wilson-Sommerfeld (1916)	Ellittiche complanari	**n, l**
Effetto campi elettrici e magnetici	Wilson-Sommerfeld (1916)	Ellittiche NON complanari	**n, l, m_l**
Struttura iperfine	Pauli (1924)	spin	**n, l, m_l, M_s**

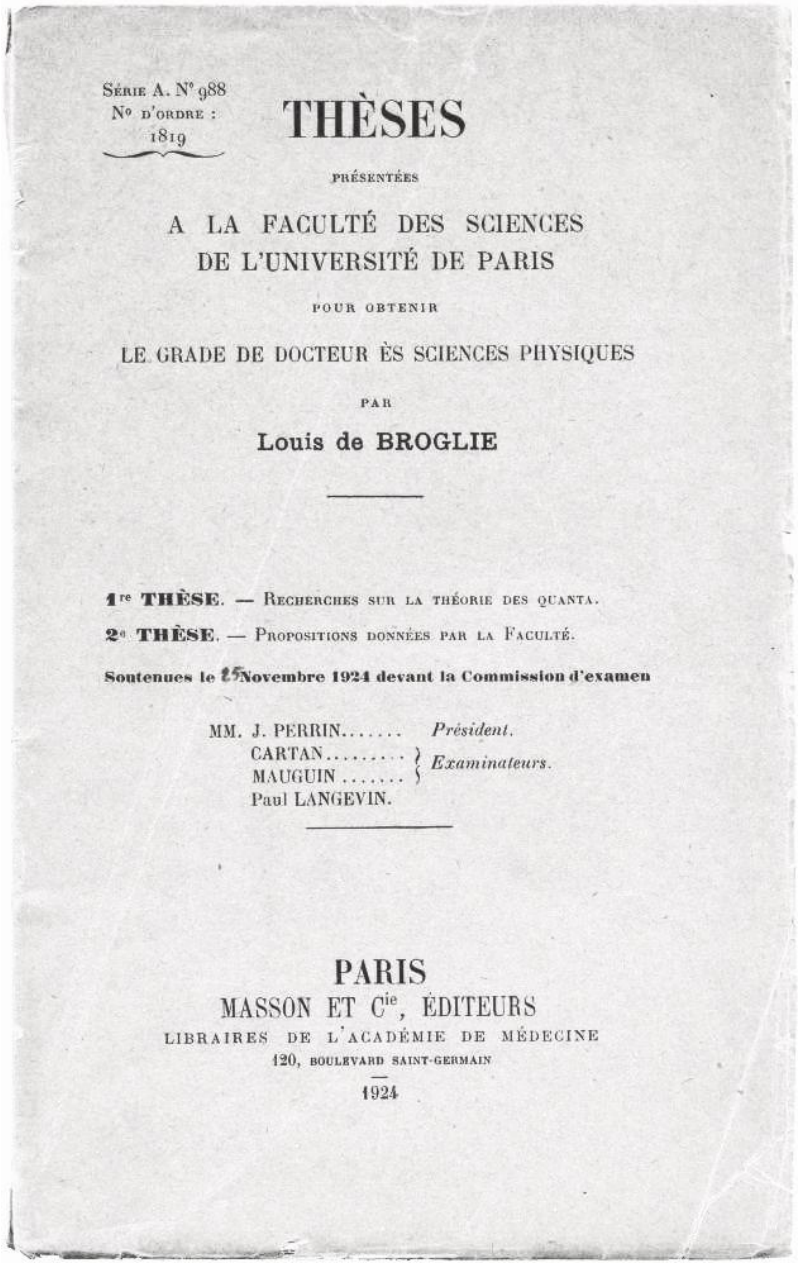
Postulato: ogni grado di libertà vincolato deve essere quantizzato separatamente.

Questi modelli (che univano fisica classica e modelli quantistici) non fornivano una quadro teorico unitario

Problema: era possibile dare una «giustificazione» ai postulati del modello di Bohr?

Occorreva introdurre un'ipotesi "azzardata" ….

Louis Victor de Broglie, nel 1924 (32 anni)
Tesi di dottorato *Recherches sur la Théorie des Quanta*



Série A. N° 988
N° d'ordre :
1819

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Louis de BROGLIE

1re THÈSE. — Recherches sur la théorie des quanta.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 25 Novembre 1924 devant la Commission d'examen

MM. J. PERRIN..... *Président.*
CARTAN..... } *Examinateurs.*
MAUGUIN..... }
Paul LANGEVIN.

PARIS
MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN
1924

L’ipotesi di de Broglie

”Il movimento di un corpuscolo, quale esso sia, fotone, elettrone, o altro elemento costitutivo della materia, deve essere sempre associato alla ***propagazione di una certa onda, un’onda fittizia («onda di materia»)*** *con*

$$\lambda = h/mv.$$

Se applichiamo quest'ultima agli elettroni, possiamo interpretare le condizioni quantiche che definiscono le orbite stazionarie di Bohr e che esprimono che l'onda associata all'elettrone è un'onda stazionaria: ***la presenza di numeri interi in queste formule è allora del tutto naturale.”***

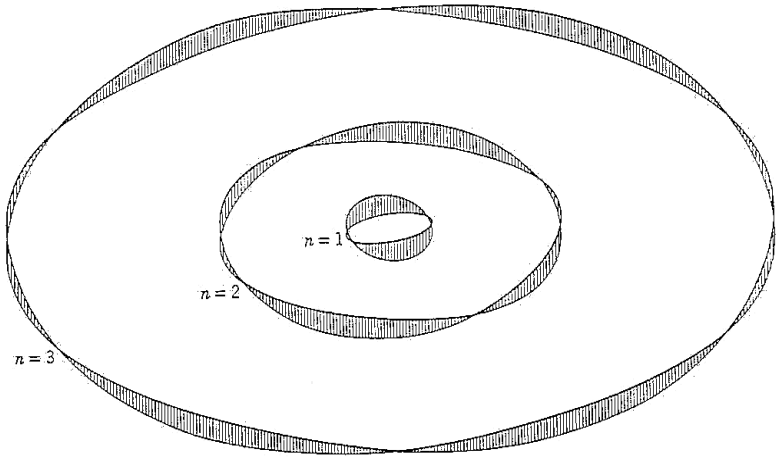
L. de Broglie

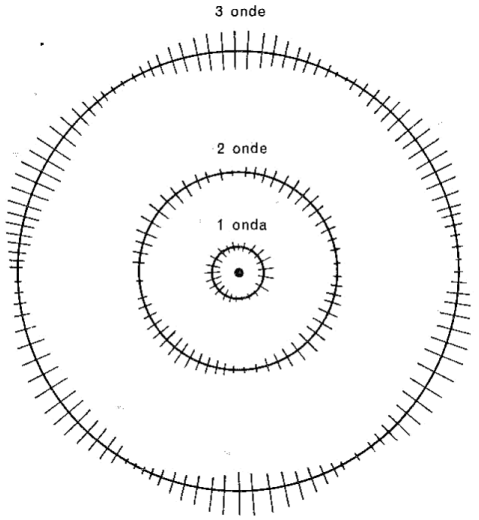
Quindi, l'elettrone:

- occupa un'orbita circolare di raggio r e di lunghezza $L_{circ} = 2\pi r$;
- **si muove di moto ondulatorio** in presenza del vincolo imposto dall'attrazione elettrostatica del nucleo;
- sono **permesse solo onde stazionarie** con lunghezze d'onda multiple intere di $\lambda = h/mv$, in questo caso $L_{circ} = 2\pi r =$ **n (h/mv)** $= n\lambda$

Un'onda con numeri frazionari di λ risulterà "**proibita**" in quanto **si estinguerebbe** rapidamente per la sovrapposizione (**interferenza distruttiva**) di creste e valli. Pertanto, se gli elettroni si muovono di moto ondulatorio, e sono limitati a orbite di raggio fisso, ciò spiega perché possono avere solo certe frequenze ed energie.

Giustificazione all'assunzione di Bohr
l'elettrone non irradia energia perché l'onda è stazionaria.





Una rappresentazione delle onde stazionarie immaginate da De Broglie delle prime tre orbite di Bohr (la posizione dei nodi è arbitraria)

Il suo relatore, Paul Langevin, non era molto convinto delle ipotesi avanzate del suo allievo. Interpellò allora un suo fidato e autorevole amico/scienziato a cui inviò la tesi per avere un suo parere che è condensato in questa esclamazione: “Questa idea può sembrare folle, ma è realmente valida!”.

L’amico era Albert Einstein ….

… e successivamente fu proprio Einstein a sottoporre ad un fisico teorico, di cui aveva grande stima, la tesi di de Broglie invitandolo ad approfondire le "azzardate" speculazioni. Questo fisico era Schrödinger...

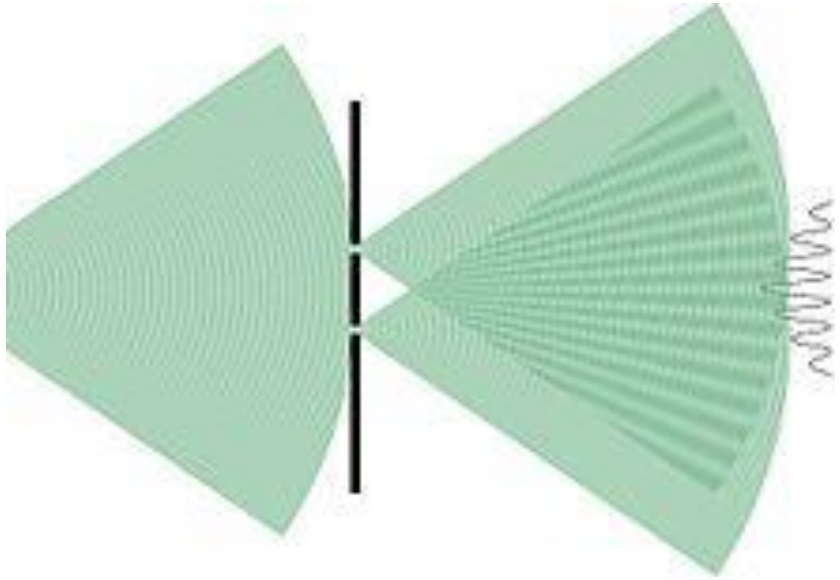
… che nel 1926 pubblicherà la sua famosa equazione!

Con de Broglie la quantizzazione non viene postulata a priori, come nel modello di Bohr, ma è una conseguenza del comportamento ondulatorio dell'elettrone.

La conferma sperimentale

L'ipotesi trovò conferma due anni dopo con gli esperimenti di Davisson e Germer nel 1927, mediante diffrazione degli elettroni da un reticolo cristallino di nichel.

Diffrazione: deviazione della traiettoria di propagazione delle onde quando queste incontrano un ostacolo sul loro cammino. Se l'ampiezza della fenditura è dello stesso ordine di grandezza di λ (es. reticolo cristallino), si osservano figure (frange) di interferenza



In molti testi universitari e delle scuole l'ipotesi di de Broglie viene accompagnata all'esempio delle corde vibranti per introdurre ai concetti del moto ondulatorio ….

Un aiuto: **utilizzo di analogie derivate dallo studio di fenomeni del mondo macroscopico e descrivibili in termini di fisica classica**

Un rischio: introdurre «mis-concezioni» che possono ostacolare i successivi stadi di apprendimento

Approfondiamo ….

1. Onde stazionarie in sistemi 1D lineari e circolari
2. Onde stazionarie in sistemi 2D
3. Onde stazionarie in sistemi 3D
4. Le soluzioni MQ per l'atomo di Idrogeno

Fisica Onde Musica

C. A. Rozzi e collaboratori, *Fisica onde musica,* 2023, [https://fisicaondemusica.unimore.it/index.html]

Dove incontriamo le onde?

- onde meccaniche (es.: onde sonore)
- onde elettromagnetiche
- meccanica ondulatoria (equazione di Schrödinger)

Cosa è un'onda?

Onda: perturbazione che nasce da una sorgente e **si propaga nel tempo e nello spazio** trasportando energia e quantità di moto, senza comportare spostamento della materia

Perturbazione: variazione di qualunque grandezza fisica (es. variazione di P, T, intensità del campo elettrico, posizione, ecc..) attorno alla sua posizione di equilibrio

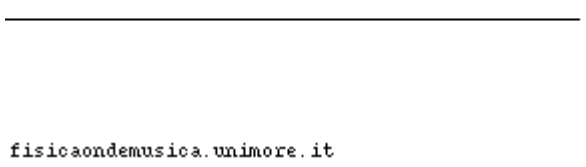
Propagazione attraverso:

- mezzo materiale (onde «meccaniche»): le particelle del mezzo non viaggiano assieme all'onda, ma viaggia solo la perturbazione che esse subiscono;
- il vuoto (onde elettromagnetiche): "vibra" il campo elettrico-magnetico

Onde in sistemi 1D – lineari
corda vibrante senza e con vincolo

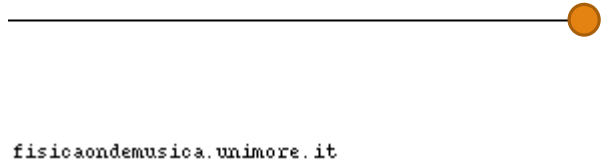
1 singolo impulso

Riflessione da un estremo libero
(onda progressiva e regressiva)



Mantenuta la fase
nell'onda regressiva

Riflessione da un estremo vincolato
(onda progressiva e regressiva)



Inversione di fase
nell'onda regressiva

Onde stazionarie in sistemi 1D – lineari

Corda vibrante con estremi vincolati

Sequenza di impulsi in sistema vincolato agli estremi

Vincolo: ampiezza nulla agli estremi

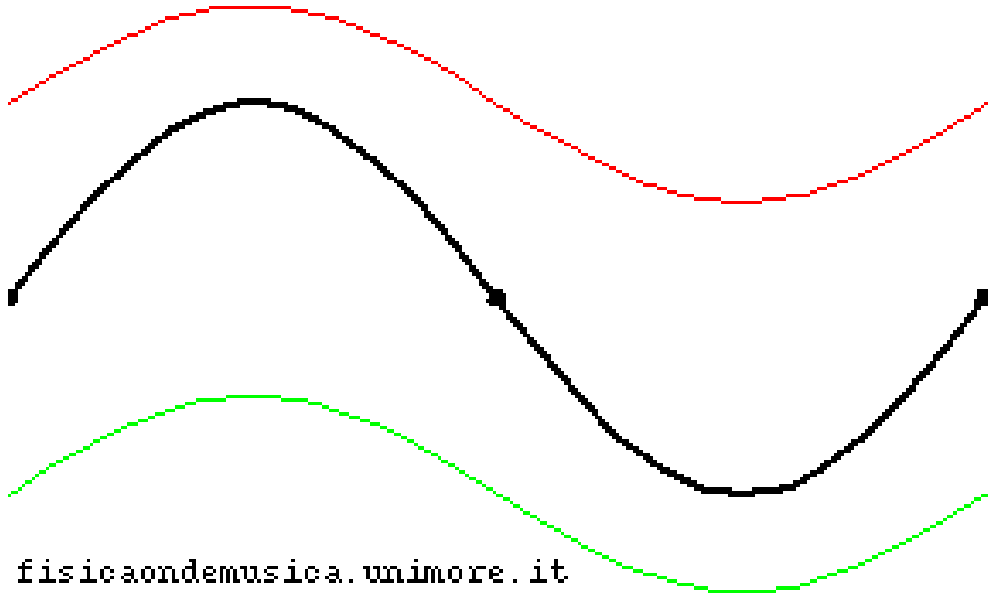
Due onde viaggianti:

onda progressiva

onda regressiva

La loro **interferenza positiva** genera un'onda risultante che non ha le caratteristiche di un'onda viaggiante, ovvero «**non si propaga**»:
i nodi e i punti di massima ampiezza restano fissi

L'onda è un'onda «stazionaria»



La soluzione **dipende dal numero intero, n**

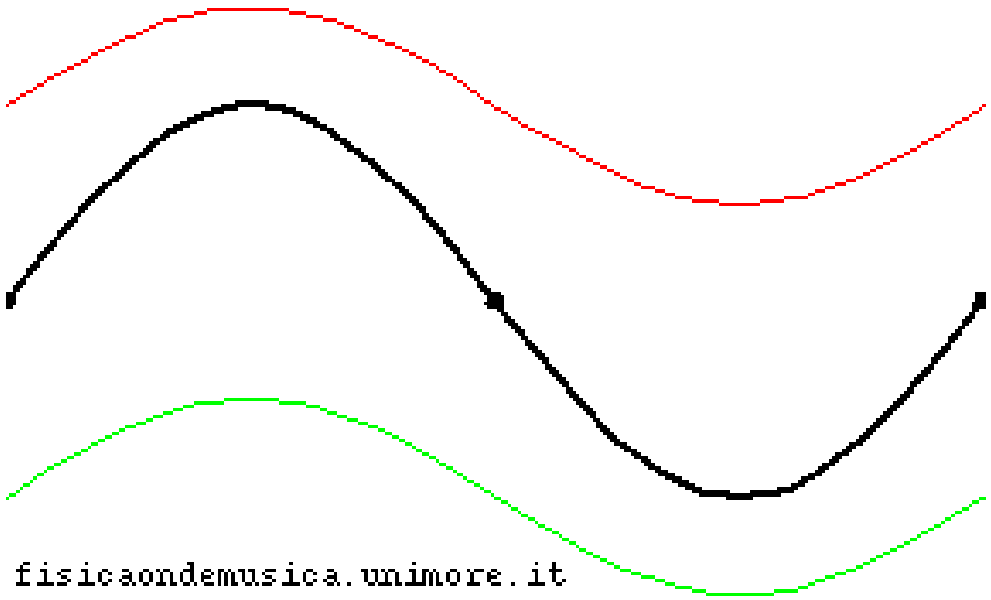
$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)\,\chi(t) = A_n \sin(n\pi x/L)\cos(\omega_n t + \phi)$$

$\psi_n(x)$ è funzione del sin(x):
$\chi(t)$ modula l'ampiezza in funzione del tempo

Permesse solo vibrazioni (**modi normali**) con:

$$\lambda = 2L/n$$

dove L è la lunghezza della corda e **n = 1, 2, 3, …**
(vincolo in una dimensione)



Onde stazionarie in sistemi 1D circolari

Onda stazionaria: composizione onda viaggiante in **senso orario** e onda in **senso antiorario.** **Vincolo**: moto lungo la circonferenza

L'onda riproduce se stessa per ogni rivoluzione sull'orbita, al fine di evitare il fenomeno dell'interferenza distruttiva che la annullerebbe.

Le soluzioni stazionarie:

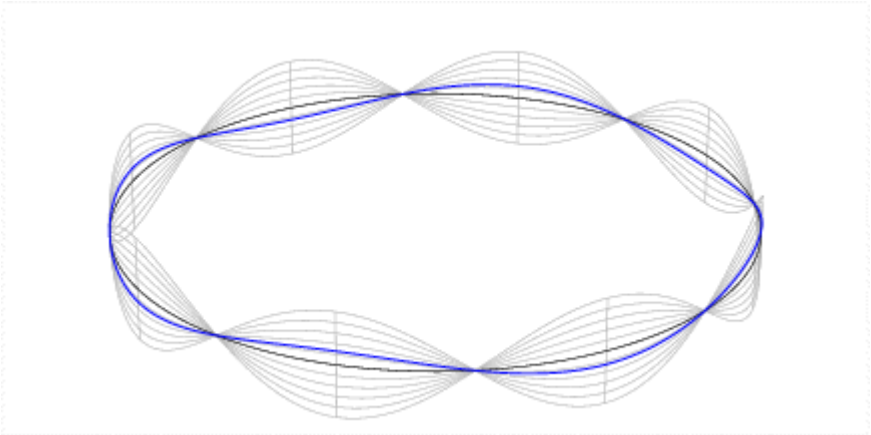
$$\Psi_n(r, t) = \psi_n(r)\,\chi(t)$$

La condizione:

$$\lambda = 2\pi r/n$$

con **n = 1, 2, 3, …**

(vincolo in una dimensione)



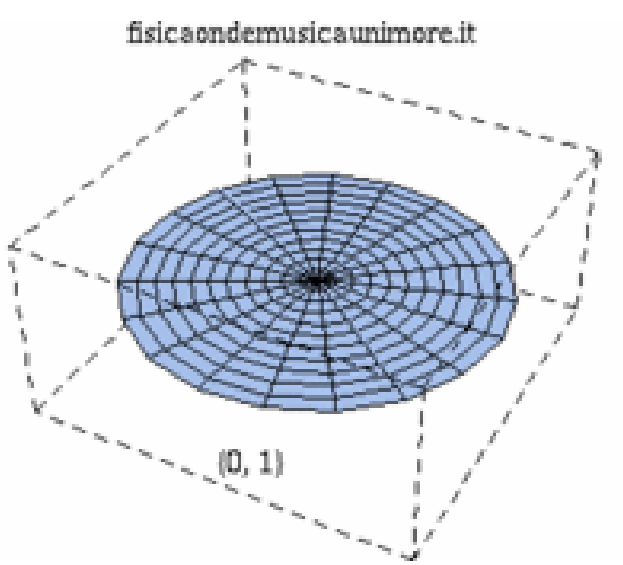
Onde stazionarie in sistemi 2D

Membrana elastica ideale: il tamburo

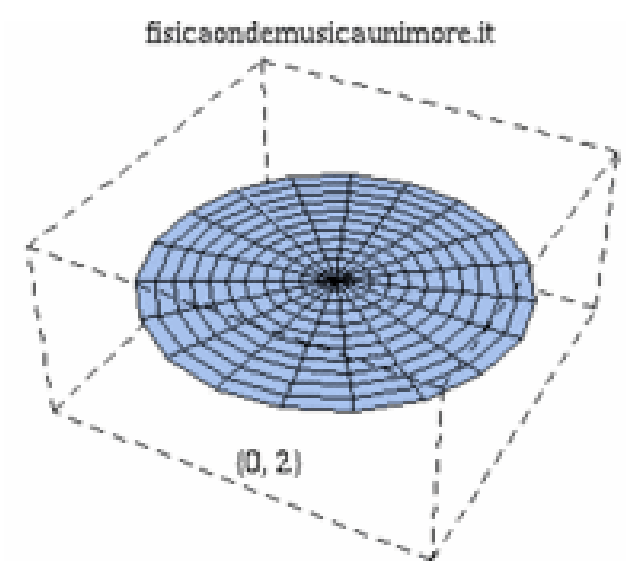
In coordinate polari (r, θ): $0 \le r < a$ $0 \le \theta \le 2\pi$ **Vincolo**: ampiezza nulla al bordo

Soluzioni stazionarie: $\Psi_{n,l}(r, \theta, t) = R_{n,l}(r)\,\Theta_l(\theta)\,\chi(t)$

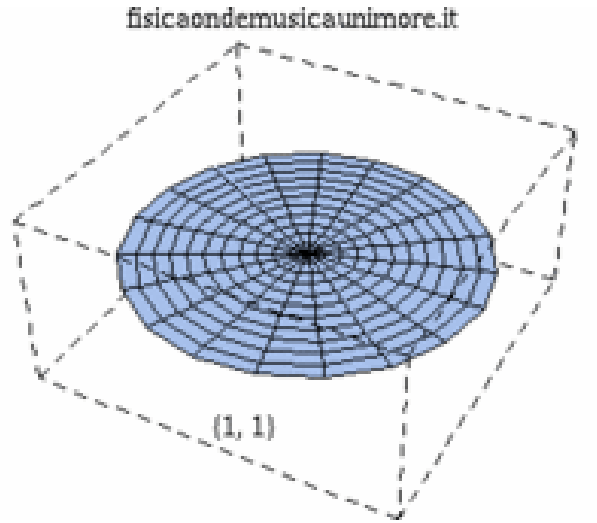
Dipendono da **2 numeri interi** (**n** e **l**) (vincolo in un piano)



{0,1}: 0 diametri nodali; 1 cerchio nodale



{0,2}: 0 diametri nodali; 2 cerchi nodali



{1,1}: 1 diametro nodale; 1 cerchio nodale

Onde stazionarie in sistemi 3D

La sfera vibrante

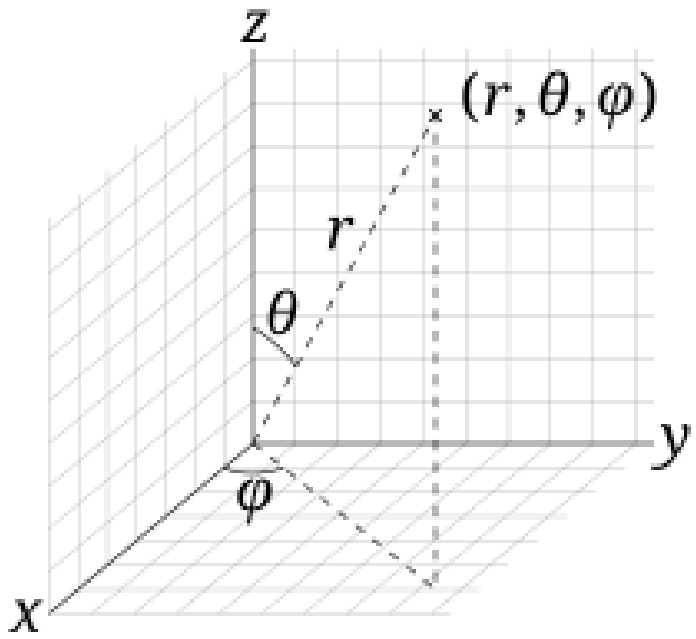
Operando in coordinate sferiche:

$0 \le r < a \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$

Soluzioni stazionarie $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \phi)$

dipendono da **3 numeri interi** (**n, l, m**) (vincolo nello spazio)

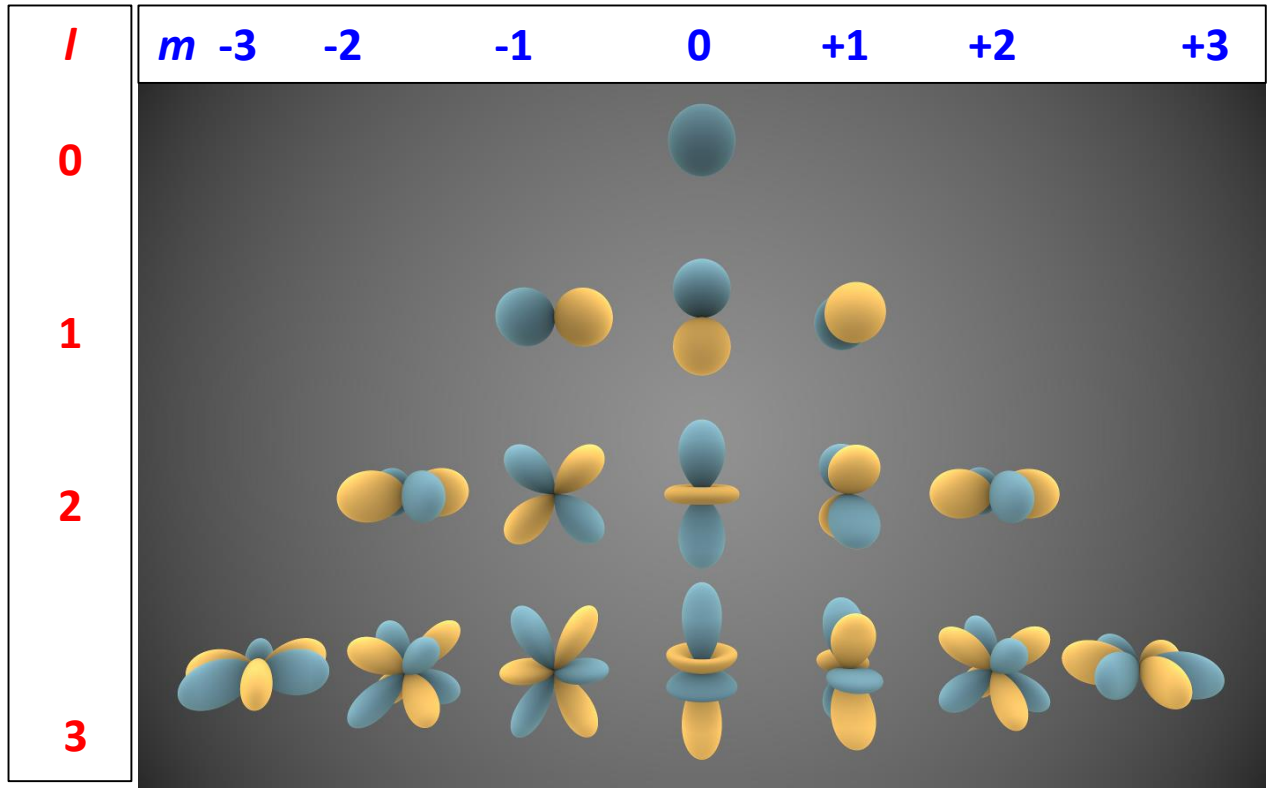
n = 1, 2, 3, …
l = 0, 1, 2, …
m = -l, -l+1, …. 0 ….., l-1, l



Physics convention!

Y_{lm} **armoniche sferiche** : funzioni definite sulla superficie di una sfera

Le armoniche sferiche



Il ruolo dei vincoli

A causa dei **vincoli** (condizioni al contorno) solo alcune soluzioni sono permesse:

i vincoli discretizzano le soluzioni nel sistema macroscopico.

Ricordando ….
Postulato: ogni grado di libertà vincolato deve essere quantizzato separatamente.

Il concetto di "**vincolo**" corrisponde all'introduzione di un **potenziale** che assume valore nullo lungo il segmento/circonferenza/piano/spazio e valore infinito in corrispondenza degli estremi

"Vincolo" associato a un potenziale

nel caso di un atomo, il vincolo sarà costituito dal potenziale coulombiano che descrive l'attrazione elettrone-nucleo

Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger per l'atomo di Idrogeno

Soluzioni stazionarie:

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = \psi(r, \theta, \phi)\, \chi(t) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \phi)\, \chi(t)$$

$R(r)$ dipende dal potenziale elettrostatico (potenziale «centrale»)
$Y(\theta, \phi)$ sono le soluzioni ottenute per la sfera vibrante (armoniche sferiche)
$\chi(t)$ modula l'ampiezza in funzione del tempo: $\chi(t) = e^{-iEt/\hbar}$

L'oscillazione NON avviene nello spazio fisico (x,y,z), bensì in uno spazio molto più astratto (complesso), in cui il quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione è correlato alla probabilità di trovare l'elettrone. **La funzione d'onda non ha di per sé un significato fisico**, ma lo ha il suo quadrato ($\psi\ \psi^*$) che permette di calcolare la probabilità di trovare l'elettrone in un volumetto dV e tale probabilità **non dipende al tempo (stato stazionario)**.

Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger per l'atomo di Idrogeno
una variabile in più: lo spin!

Equazione di Schrödinger: 3 variabili: (x, y, z) $\Rightarrow$ 3 numeri quantici (n, l, m_l)

Equazione di Dirac (include effetti relativistici)

4 variabili (x, y, z, t) $\Rightarrow$ 4 numeri quantici (n, l, m, m_s)

Emerge naturalmente il numero quantico di spin

Cosa volevo proporre?

L'analisi della fisica delle onde in **sistemi macroscopici**:

-) **vincolo**: presenza di un potenziale (fermi della corda; potenziale elettrostatico)

-) **discretizzazione delle soluzioni**: la funzioni dell'onda dipende da numeri interi:

sistema 1-D	ψ_n	1 numero intero
sistema 2-D	$\psi_{n,l}$	2 numeri interi
sistema 3-D	$\psi_{n,l,m}$	3 numeri interi
sistema 4-D	$\psi_{n,l,m,ms}$	4 numeri interi (lo spin!)

Caveat

Passando ai **sistemi microscopici** le analogie finiscono qui …

- ❑ la funzione d'onda elettronica NON oscilla nello spazio;
- ❑ la funzione d'onda elettronica NON ha un «significato fisico» (lo ha il prodotto $\psi\psi^*$)
- ❑ Nei sistemi macroscopici, non si può parlare di "quantizzazione", in quanto sono descritti sempre da leggi classiche e non da principi quantistici fondamentali

Bibliografia e sitografia

Cosentino, U., Venanzi, M. (2024). Esempi di percorsi didattici per l'università: Percorsi didattici di introduzione alla Meccanica Quantistica. In E. Ghibaudi, E. Aquilini, G. Villani, M. Venturi (a cura di), I tanti volti della chimica. Percorsi innovativi per insegnarla e comprenderla (pp. 323-351). Clueb Casa Editrice.

Per una trattazione della MQ: Peter Atkins, J. De Paula, J. Keeler, Chimica Fisica, Zanichelli 2020
Sulla Fisica delle onde: C. A. Rozzi e collaboratori, *Fisica onde musica,* 2023, [https://fisicaondemusica.unimore.it/index.html]
Introduzione alla MQ mediante l'analogia con la fisica degli strumenti musicali: E. Andreotti, R. Frans, Teaching quantum physics in secondary schools using the analogy with the physics of musical instruments, 2023 Phys. Educ. 58 015008
Onde stazionarie in sistemi 1D circolari: P. Riggs, Revisiting Standing Waves on a Circular Path, Phys. Teach. 59, 100 (2021); https://doi.org/10.1119/10.0003461
Onde stazionarie in sistemi 2D: Vibrations of a circular membrane:
https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane
Onde stazionarie in sistemi 3D:
https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Astronomy__Cosmology/Stellar_Atmospheres_(Tatum)/07%3A_Atomic_Spectroscopy/7.06%3A_Vibrations_of_a_Uniform_Sphere

Grazie per l’attenzione!